數學傳播　50卷2期, pp. 83-92

2026年第15屆歐洲女子數學奧林匹亞競賽試題解答

教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組

2026 年第 15 屆歐洲女子數學奧林匹亞競賽 (European Girls' Mathematical Olympiad, 簡稱 EGMO) 在法國波爾多 (Bordeaux, France) 舉行。本屆共有 47 個國家與會、合計 260 位女學生代表參賽。我國是第三次正式參賽, 獲得兩銀一銅的成績, 表現優異。競賽內容與國際數學奧林匹亞競賽 (International Mathematical Olympiad) 相仿, 由試題委員會在代數、組合、幾何、數論等領域中挑選六道試題, 供領隊會議確認成爲正式考題, 以兩天每天 3 道試題、4 小時又 30 分鐘的形式由選手作答。本屆的六道試題, 第一題屬組合, 第二、六題爲數論, 第三、四題爲代數, 第五題爲幾何。本文提供我國代表團所翻譯成正體中文版的六道 EGMO 試題以及官方釋出的參考解答, 作爲國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考之用。

問題一: 一張 2026×2026 的方格棋盤是*加酒的*, 若其 2026^2 格中有至少一格被塗成紅色。一個由若干格構成的長方形區域被稱爲*奇加酒長方形*, 若其中恰有奇數格被塗成紅色。試求最大的正整數 M, 使得在任何 2026×2026 的加酒棋盤上, 皆存在大小至少 M 格的奇加酒長方形。

備註: 一個長方形區域的邊與棋盤的邊平行, 其長與寬可以相等, 且包含其內部的所有格子。

試題委員會公布的參考答案: 最大的 M 爲 1013^2。

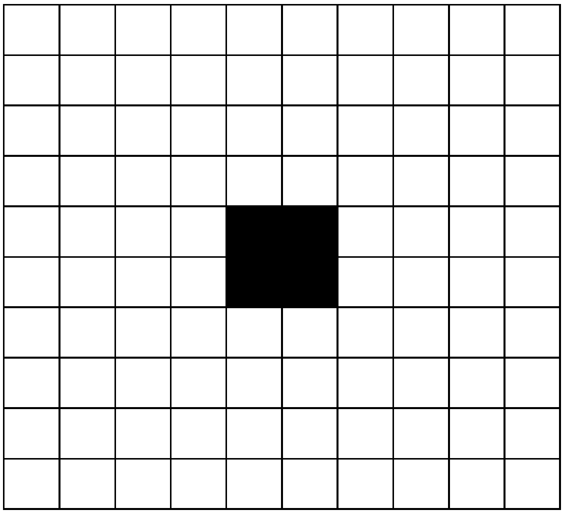
首先, 考慮如下將中央 2×2 四格塗色的構造。易知任何包含至少兩個有色格的長方形, 都恰有 2 或 4 個紅格。這表示在此加酒棋盤上, 不存在比 1013×1013 大的奇加酒長方形, 因此 $M \leq 1013^2$。

我們接下來證明$M = 1013^2$滿足題意, 也就是任何一個加酒棋盤上都有至少1013^2大小的奇加酒長方形。歸謬證法, 假設存在某個不存在大小至少 1013×1013 奇加酒長方形的加酒棋盤。將其切成四個 1013×1013 子棋盤, 並不失一般性假設在右下角的子棋盤中, 存在一格

(x, y) 是紅的 (這裡我們定義左上角的格子是 $(1,1)$)。考慮以下四個長方形:

$$R_1=[1,x]\times[1,y],\ R_2=[1,x-1]\times[1,y],\ R_3=[1,x]\times[1,y-1],\ R_4=[1,x-1]\times[1,y-1],$$

並假設 R_i 中的有色格數量爲 n_i。依據假設, n_i 皆爲偶數, 因此 $n_1+\cdots+n_4$ 是偶數。然而, $n_1+\cdots+n_4$ 會重複計算 $[1,x-1]\times[1,y-1]$ 內有色格數四次, 加上 $[1,x-1]\times[y,y]$ 與 $[x,x]\times[1,y-1]$ 兩次, 以及 (x,y) 單格一次, 因此必然是奇數, 矛盾。



評註: 此爲一簡單的組合題, 但前期探索可能 M 值所需花的時間滿多的, 算是相對花時間探索的一題, 推薦給競賽入門的同學。

問題二: 給定正整數 n, 秦始皇玩一場遊戲。他首先在黑板上寫下一個 1。他接下來可以進行以下動作任意次: 選擇滿足 $1\le j\le n$ 的正整數 j, 並將黑板上的數字 V 改爲 $j\cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$。其中 $R(x)$ 表示最接近 x 的整數; 若 x 恰在兩個相鄰整數的正中間, 則取其中較大者。舉例來說, $R(1.3)=1$ 而 $R(1.5)=R(1.8)=2$。

1. 證明: 對於給定的 n, 存在正整數 $B>0$ 使得秦始皇不可能在黑板上寫下大於B的數字。
2. 對於給定的 n, 令 $f(n)$ 爲秦始皇能夠透過有限次動作在黑板上寫出的最大數字。證明: 存在正整數 N, 使得對於所有 $n\ge N$, 2026 整除 $f(n)$ 皆成立。

試題委員會公布的參考答案:

(a) 我們對回合數歸納來證明我們可以取 $B=n!$。第一回合顯然。若某回合 $V\le n!$, 則由 $R(V/j)\le R(n!/j)=n!/j$ 知 $j\cdot R(V/j)\le n!$, 故新的 $V\le n!$。 □

(b) 我們將對於充分大的 n, $2\mid f(n)$ 與 $1013\mid f(n)$ 分成兩個引理證明。

Lemma 1. 對於所有正整數 k, $2^k|f(n)$ 對所有 $n \geq 2^k$ 皆成立。

Proof. 若 $2^k \nmid f(n)$, 令 $\ell = \nu_2(f(n)) \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$ 並取 $j = 2^{\ell+1} \leq 2^k = n$。注意到 $n \equiv 2^\ell \mod 2^{\ell+1}$, 且由 $\ell \leq k-1$ 知 $2^\ell \leq n$, 故 $f(n)/2^{\ell+1}$ 是半整數。這表示 $j \cdot R(f(n)/j) > j \cdot f(n)/j = f(n)$, 與 $f(n)$ 的最大性矛盾。 □

Lemma 2. 對於任何正奇數 A 滿足 $A < 2^k \leq n^{2k}$, 有 $A \mid f(n)$。

Proof. 注意到對於所有 $j \in \{0, 1, \cdots, k\}$, $f(n)$ 對 $2^j A$ 的餘數 r_j 滿足 $0 \leq r_j < 2^{j-1}A$, 否則 $j \times R(f(n)/j)) > f(n)$, 矛盾。又注意到 $r_j \equiv f(n) \equiv r_{j+1} \mod 2^j A$ 且 $-2^j A < r_{j+1} - r_j < 2^j A$, 我們有 $r_0 = r_1 = \cdots = r_k$。再由 Lemma 1, $2^k \mid f(n)$, 我們有 $2^k \mid r_k = r_0$, 從而 $r_0 = 0$ (因爲$0 \leq r_0 < A \leq 2^k$), 也就是 $A \mid f(n)$。 □

結合兩者, 我們得到 $2026 \mid f(n)$ 對於任何 $n \geq 2^{20}$ 皆成立。

評註: 本題雖然題敘相對複雜, 但本質上算是單純的數論題目, 適合練習使用。

問題三: 令 $\mathbb{R}$ 爲所有實數所成集合。試求所有函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 使得對於所有實數 x, y, 我們有

$$f\Big((f(x) + f(y))^2\Big) = (x + y)f(x + y).$$

試題委員會公布的參考答案: 所有解爲 $f(x) = x,\ f(x) = -x,\ f(x) = 0$。

記原方程爲 $(*)$。容易檢查上述三個函數皆滿足題目條件。我們先證明 f 的幾個性質:

性質 1: $f(0)=0$。

Proof. 令 $x = y = 0$ 代入 $(*)$, 得到

$$f(4f(0)^2) = 0.$$

設 $T = f^{-1}(0)$ 爲所有使 f 爲零的點的集合, 則 $4f(0)^2 \in T$。再令 $x = 0,\ y = 4f(0)^2$ 代入 $(*)$, 得

$$f(f(0)^2) = 0,$$

故 $f(0)^2 \in T$。

若 $t_1, t_2 \in T$, 則由代入 $y = t_1$ 與 $y = t_2$ 可得

$$(x + t_1)f(x + t_1) = f(f(x)^2) = (x + t_2)f(x + t_2). \tag{1}$$

令 $x = -t_1$, 得 $t_2 - t_1 \in T$, 因此

$$4f(0)^2 - f(0)^2 = 3f(0)^2 \in T,$$

進而

$$3f(0)^2-f(0)^2=2f(0)^2\in T。$$

再令 $x=y=f(0)^2$ 代入 $(*)$, 得到

$$f(0)=2f(0)^2f(2f(0)^2)=0。$$

□

性質 2: f 爲單射或 $f\equiv 0$。

Proof. 令 $y=0$ 代入 $(*)$, 得到

$$f(f(x)^2)=xf(x). \tag{2}$$

將 (2) 中 x 換成 $f(x)^2$, 得到

$$f(x^2f(x)^2)=f(x)^2f(f(x)^2)=xf(x)^3。$$

將 $(*)$ 兩邊乘以 $(f(x)+f(y))^2$, 得

$$(x+y)f(x+y)(f(x)+f(y))^2=f\big((f(x)+f(y))^2\big)(f(x)+f(y))^2=f\Big(f((f(x)+f(y))^2)^2\Big)$$
$$=f\big((x+y)^2f(x+y)^2\big)=(x+y)f(x+y)^3。$$

因此對所有 $x\neq -y$, 有

$$f(x+y)\big(f(x+y)-f(x)-f(y)\big)\big(f(x+y)+f(x)+f(y)\big)=0. \tag{3}$$

現在我們來證明 $T=\{0\}$ 或 $T=\mathbb{R}$。假設不成立, 取非零 $t\in T$。由 (1) 可知 $-2t\in T$。取 $x\notin T$ 且 $y=-2t$, 代入 (3):

1. 若 $f(x+y)=0$, 則 $x+y\in T$, 故 $x\in T$, 矛盾;
2. 若 $f(x+y)=f(x)+f(y)=f(x)$, 則由 (1) 得

   $$xf(x)=(x+y)f(x+y)=(x+y)f(x)\Rightarrow f(x)=0,$$

   矛盾;
3. 若 $-f(x+y)=f(x)+f(y)=f(x)$, 同理得到矛盾。

故 $T=\{0\}$ 或 $T=\mathbb{R}$。

現在, 若 $f\not\equiv 0$, 則 $T=\{0\}$。若 $f(a)=f(b)$, 則

$$af(a)=f(f(a)^2)=f(f(b)^2)=bf(b),$$

即 $(a-b)f(a)=0$, 故 $a=b$, 也就是 f 單射。

□

性質 3: f 爲可加函數。

Proof. 將 (x,y) 與 $(x+y,0)$ 代入 $(*)$, 結合 $f(0)=0$, 我們有

$$f((f(x)+f(y))^2)=(x+y)f(x+y)=f(f(x+y)^2),$$

從而由單射性知 $f(x+y)^2=(f(x)+f(y))^2$, 也就是

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \text{或} \quad -f(x+y)=f(x)+f(y)。 \tag{4}$$

再令 $y=-x$, 得到 $f(-x)=-f(x)$。

現在, 假設存在實數 x,y 使得

$$f(x+y)\neq f(x)+f(y)。 \tag{5}$$

這表示 $-f(x+y)=f(x)+f(y)$. 將 $x=x+y$, $y=-y$ 代入 (4):

1. 若 $f(x+y-y)=f(x+y)-f(y)$, 則$f(x)=f(x+y)-f(y)$, 移項得 $f(x)+f(y)=f(x+y)$, 與 (5) 矛盾。

2. 若$-f(x+y-y)=f(x+y)-f(y)$, 則$-f(x)=f(x+y)-f(y)$. 再結合$-f(x+y)=f(x)+f(y)$, 可得$f(y)=0$, 因此 $y=0$, 從而$f(x)+f(y)=f(x)=f(x+y)$, 仍與 (5) 矛盾。

故假設不成立, 換言之 f 可加。 □

Step C: 若 $T=\{0\}$ 則 $f(x)\equiv x$ 或 $f(x)\equiv -x$。

Proof. 我們已知 f 爲可加函數、單射, 且滿足 (2)。以下證明滿足這三個條件的函數只有上述兩種。

在 (2) 中令 $x=1$, 得到 $f(f(1)^2)=f(1)$, 再由單射性可知 $f(1)^2=1$。又若 f 爲解, 則 $-f$ 亦爲解, 因此不失一般性, 可設 $f(1)=1$。將 (2) 中的 x 換爲 $x+1$, 得到

$$\begin{aligned}
f\big(f(f(2x))^2\big)&=f(2x)f(f(2x)),\\
f\big((2f(f(x)))^2\big)&=4f(x)f(f(x)),\\
f\big(f(x)^2+2xf(x)+x^2\big)&=2f(x)^2+2xf(x),\\
f(f(x)^2)+2f(xf(x))+f(x^2)&=2f(x)^2+2xf(x).
\end{aligned}$$

再由 (2) 得

$$2f(xf(x))=2f\big(f(f(x)^2)\big)=f(x)^2+f(f(x)^2)=f(x)^2+xf(x),$$

則有

$$xf(x)+\big(f(x)^2+xf(x)\big)+f(x^2)=2f(x)^2+2xf(x),$$

從而

$$f(x^2)=f(x)^2\geq 0。$$

這表示此可加函數對所有非負 x 皆有 $f(x)\geq 0$, 故爲線性函數。再結合 $f(1)=1$, 我們知道此時 $f(x)=x$。顯然若 $f(1)=-1$ 則 $f(x)=-x$, 故我們得到全部三種解。

評註: 此爲一相當困難的函數方程題, 光要求出 $f(0)=0$ 都需要相當的功力。

問題四: 令 $1=a_1\geq a_2\geq a_3\geq\cdots$ 爲一由實數組成的無窮數列, 使得 $a_n=a_{2n}+a_{2n+1}$ 對於所有正整數 n 皆成立。令 $r=2026^{2026}$。證明:

$$\frac{1}{r}\leq a_r\leq\frac{2}{r+1}.$$

試題委員會公布的參考答案: 我們先證明關鍵引理。

Lemma 3. 對每個 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1}=1.$$

Proof. 對所有 $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, 由題意有 $a_k=a_{2k}+a_{2k+1}$。將這些等式全部加總, 可得

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=a_2+a_3+\cdots+a_{2n-2}+a_{2n-1}.$$

再配合 $a_1=1$, 便推出

$$a_n+\cdots+a_{2n-1}=(a_2+a_3+\cdots+a_{2n-2}+a_{2n-1})-(a_2+\cdots+a_{n-1})=1. \qquad \square$$

下界的證明: 將 Lemma 3 套用在 $n=r$, 得到

$$a_r+\cdots+a_{2r-1}=1.$$

由於數列遞減, $a_{r+1},\ldots,a_{2r-1}$ 都小於等於 a_r, 所以

$$ra_r\geq a_r+\cdots+a_{2r-1}=1.$$

因此 $a_r\geq\frac{1}{r}$。

上界的證明: 將 Lemma 3 套用在 $n=\frac{r}{2}+1$, 得到

$$a_{r/2+1}+\cdots+a_{r+1}=1.$$

注意到 $a_{r/2+1}, \ldots, a_{r-1}$ 中的每一項都大於等於 a_r, 因此

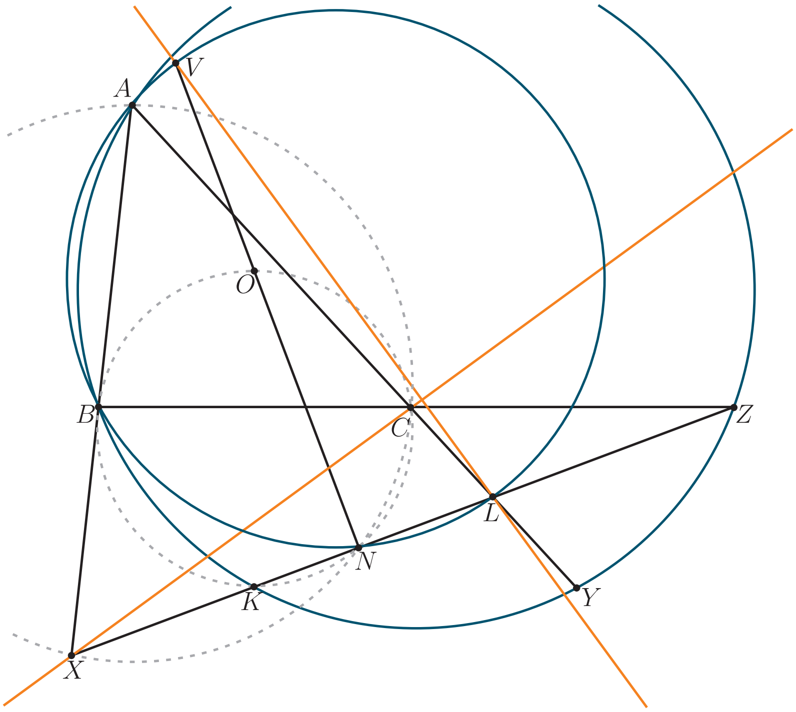
$$\frac{r}{2}\,a_r + a_{r+1} = \left(\frac{r}{2} - 1\right) a_r + a_r + a_{r+1} \le a_{r/2+1} + \cdots + a_{r+1} = 1.$$

再結合 $a_{r+1} \ge \frac{1}{r+1}$, 可得

$$a_r \le \frac{2}{r}\left(1 - \frac{1}{r+1}\right) = \frac{2}{r+1}.$$

評註: 此爲十分單純的數列問題, 算是對基本分析能力的好練習。

問題五: 令 ABC 爲一銳角三角形, 其中 $AC > AB$。令 ω 爲其外接圓, O 爲其外心。令 K 爲 ω 對 B 和 C 的兩切線交點。令三角形 ABK 外接圓再交 BC 於 $Z \neq B$。又令 L 爲 KZ 中點, X 爲直線 KZ 與 AB 交點。令 V 爲三角形 ABL 外接圓上, 與 A 在 BC 同側, 且使得 $OV \perp KZ$ 的唯一點。證明: $LV \perp CX$。



試題委員會公布的參考答案: 我們記 M 爲 BC 的中點, N 爲從 O 向 KZ 作垂線的垂足, Y 爲直線 AC 與圓 ABK 的另一個交點, U 爲直線 AK 與圓 ABC 的交點。我們將整個證明分爲三個 Claim。

Claim 1. 點 L 在直線 AC 上。

Proof. 將直線 AC 延長, 與圓 ABK 再次交於點 Y。由交錯弧定理 (alternate segment

theorem), 我們有

$$\angle ZYA=\angle ZBA=\angle KCY,\quad \text{以及}\quad \angle AYK=180^\circ-\angle KBA=\angle ACB.$$

因此可得 $ZY\parallel KC$且$KY\parallel CZ$, 故四邊形 $KCZY$ 爲平行四邊形。由於 L 是線段 KZ 的中點, 因此它同時也是 CY 的中點, 因此 L 位於直線 AC 上。 □

Claim 2. 從 O 向 KZ 作垂線的垂足在圓 ABL 上。

Proof. 由於 $\angle OCK=\angle ONK=\angle KBO=90^\circ$, 可知點 O,C,N,K,B 共圓。由此可得

$$\angle BNK=\angle BCK=\angle BAC=\angle BAL,$$

其中最後一個等號是因爲 (由 Claim 1) 點 L 位於直線 AC 上。故點 N 位於圓 ABL 上。 □

Claim 3. 直線 VL 與 CX 垂直。

Proof. 由於 $\angle KBO=\angle KCO=\angle KNO=90^\circ$, 可知 O,C,N,K,B 共圓。因此

$$\angle LNC=180^\circ-\angle CNK=\angle KBC=\angle BAC=\angle XAC,$$

從而證明 A,C,N,X 共圓。由上述結果, 且因爲 $VN\perp KZ$, 我們有

$$\angle LXC=\angle NXC=\angle NAC=\angle NAL=\angle NVL=90^\circ-\angle VLN=90^\circ-\angle VLX$$

因此 $CX\perp VL$。 □

評註: 此爲一難度中等之幾何題, 各 Claim 都存在複數種證明方式。

問題六: 令 p 爲一質數, n 則爲一個不被 p 整除的正整數。令 k 爲 n 的正因數個數, $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$ 爲 n 的所有正因數。對於 $i=1,2,\ldots,k$, 令 c_i 爲 d_i^2 的所有正因數 ℓ 中, 使得 $d_i-\ell$ 被 p 整除的 ℓ 的個數。證明:

$$(p-1)(c_1+c_2+\cdots+c_k)\geq k^2.$$

試題委員會公布的參考答案:

Lemma 4. 滿足 $d\equiv d' \pmod p$ 的有序因數對 (d,d') (允許 $d=d'$) 的數量至少爲 $\frac{k^2}{p-1}$。

Proof. 對每個 $t\in\{1,2,\ldots,p-1\}$, 設 N_t 爲所有滿足 $d\equiv t \pmod p$ 的因數 d 的個數。考慮 n 的所有因數在模 p 下的分佈。由於 $p\nmid n$, 可得

$$k=N_1+N_2+\cdots+N_{p-1}.$$

而滿足 $d \equiv d' \pmod p$ 的有序對 (d, d') 的數量爲

$$N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{p-1}^2.$$

由 QM-AM 不等式,

$$N_1^2 + \cdots + N_{p-1}^2 \geq \frac{(N_1 + \cdots + N_{p-1})^2}{p-1} = \frac{k^2}{p-1}. \qquad \square$$

接下來只需證明: 所有滿足條件的 (d_i, ℓ) 對的數量至少等於上述 (d, d') 對的數量。爲此, 我們對每個滿足 $d_i \equiv d_j \pmod p$ 的因數對 (d_i, d_j), 構造一對 (a, b), 使得

$$a \mid n, \quad b \mid a^2, \quad p \mid (a-b),$$

且所有構造出的 (a, b) 彼此不同。

對於一對 (d_i, d_j), 定義

$$a = \operatorname{lcm}(d_i, d_j), \qquad b = \frac{d_j^2}{\gcd(d_i, d_j)}.$$

由於 $d_i, d_j \mid n$, 可得 $a = \operatorname{lcm}(d_i, d_j) \mid n$。又因爲

$$b \mid d_j^2 \mid (\operatorname{lcm}(d_i, d_j))^2 = a^2,$$

故 $b \mid a^2$。再注意到

$$\operatorname{lcm}(d_i, d_j) = \frac{d_i d_j}{\gcd(d_i, d_j)},$$

因此

$$(a, b) = \left(\frac{d_i d_j}{\gcd(d_i, d_j)}, \frac{d_j^2}{\gcd(d_i, d_j)}\right).$$

由於 $\frac{d_j}{\gcd(d_i,d_j)}$ 爲整數, 且 $p \mid (d_i - d_j)$, 可得 $p \mid (a-b)$。

最後需證明此對應是單射。假設某 (a, b) 同時由 (d_i, d_j) 與 (d'_i, d'_j) 構造而得。則

$$\gcd(a, b) = \gcd\left(\frac{d_i d_j}{\gcd(d_i, d_j)}, \frac{d_j^2}{\gcd(d_i, d_j)}\right) = d_j.$$

同理亦有 $\gcd(a, b) = d'_j$, 故 $d_j = d'_j$。又因爲

$$\frac{d_i}{d_j} = \frac{a}{b} = \frac{d'_i}{d'_j},$$

因此 $d_i = d'_i$。故此對應爲單射, 從而所有構造出的 (a, b) 互不相同。

因此, 滿足條件的 (d_i, ℓ) 對數量至少爲滿足 $d \equiv d' \pmod p$ 的有序對數量, 結合引理, 即得

$$(p-1)(c_1+\cdots+c_k) \geq k^2.$$

評註: 此爲一難度非常高的組合數論題, 除考驗數論的基本能力外, 更需要 “靈光一閃” 式的想到可能的組合對應。

—本工作小組係由教育部委託國立臺灣師範大學, 於「中華民國參加 2026 年第 38 屆亞太數學、第 15 屆歐洲女子數學及第 67 屆國際數學奧林匹亞競賽選訓及參賽計畫」下成立。本文的主要作者爲高竹嵐教授, 任教於國立陽明交通大學統計學研究所。—